VISIT…

LANZAROTE

Caliente.COM

8. RĂSUCIREA BARELOR DREPTE

8.1. Generalități

O bară este solicitată la răsucire când efortul din orice secțiune transversală a barei este un **moment de torsiune** (răsucire).

Momentul de răsucire dintr-o secțiune oarecare, este egal cu suma tuturor momentelor forțelor situate la stânga sau la dreapta secțiunii considerate.

$$\mathbf{M_t = \sum\left(P_i \cdot R_i + M_{xi}\right)} \qquad \textbf{(8.1)}$$

În care, P_i sunt forțele exterioare normale pe axa barei, R_i distanțele de la axă la suporții forțelor, şi M_{xi} sunt momentele exterioare orientate după direcția axei Ox.

Dacă bara transmite o putere P*, în kW, la turația n, în rotații pe minut, atunci valoarea momentului de torsiune este:

$$\mathbf{M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^*\left[kW\right]}{n\left[rot / min\right]}}. \qquad \textbf{(8.2)}$$

Când valoarea momentului de torsiune variază în lungul barei, pentru calculul de rezistență, se recomandă trasarea diagramelor de momente de torsiune şi precizarea secțiunii (sau secțiunilor) periculoase.

În domeniul de activitate al inginerului mecanic se întâlnesc foarte frecvent aplicații ale răsucirii barelor drepte ca de exemplu: arbori, osii motoare, şuruburi, etc.

8.2 Tensiuni şi deformații la răsucirea barelor drepte de secțiune circulară şi inelară

Se considera o bară dreaptă de secțiune circulară şi constantă în lungul ei realizată dintr-un material continuu, omogen, izotrop şi care satisface legea lui Hooke. Pe suprafața barei se trasează cercuri şi generatoare, care formează o rețea de dreptunghiuri curbilinii, dintre care se consideră dreptunghiul elementar ABCD. Consideram secțiunea (1) situată la distanța dx de sectiunea (2), (fig.8.1,a).

După aplicarea momentului de răsucire, bara se deformează după cum este reprezentată în figura (8.1,b). Analizând deformaţia barei se constată că:

a) cercurile aflate în plane transversale rămân tot cercuri conţinute în aceleaşi plane transversale, iar distanţa dintre acestea nu se modifică semnificativ (se confirmă ipoteza lui Bernoulli, pentru punctele de pe suprafaţa exterioară şi se extinde şi la punctele de la interiorul barei);

b) elementele dreptunghiulare de pe suprafaţa laterală se transformă în paralelograme ale căror laturi îsi păstrează lungimea;

c) cele două generatoare (fibre) rămân paralele una faţă de alta, dar se modifică în elici;

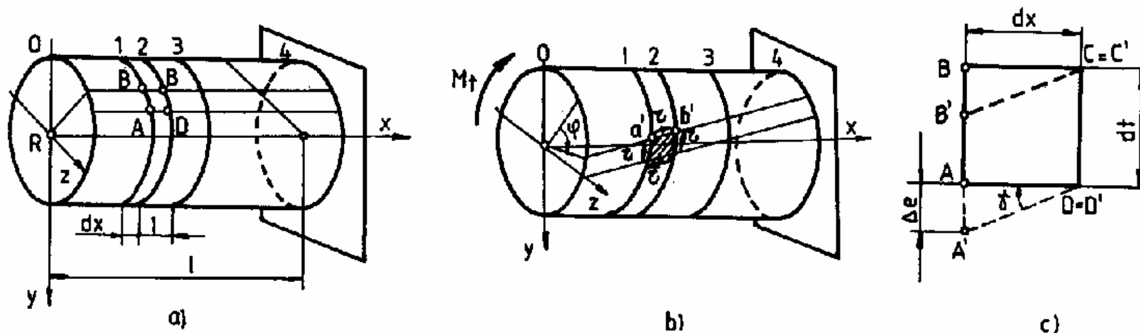


Fig. 8.1

Astfel că, orice element dreptunghiular de pe suprafaţa barei se deformează prin lunecare pură într-un paralelogram (fig.8.1,c). **Unghiul drept se modifică cu lunecarea specifică maximă,** definită de relaţia (3.38)**:**

$$\boldsymbol{\gamma_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta x} = \frac{de}{dx}}.$$

Arcul Δe, este deplasarea prin lunecare a oricărui punct A sau B în Aă şi respectiv în Bă. Astfel, cercul (1) se roteşte cu arcul Δe = AAă= BBă, faţă de cercul (2). Unghiul cu care se roteşte secţiunea (1) faţă de secţiunea (2), care se află la distanţa dx de secţiunea (1), se numeşte **deformaţie unghiulară sau rotire relativă** şi se notează cu dφ (fig. 8.2). Se poate scrie:

$$\boldsymbol{\Delta e = AA' = BB' = R \cdot d\varphi = \gamma_0 \cdot dx.}$$

rezultă:

$$\gamma_0 = \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{d\varphi}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{R} \cdot \theta,$$

în care mărimea :

$$\theta = \frac{\mathbf{d\varphi}}{\mathbf{dx}}, \tag{8.3}$$

se numeşte **rotire specifică**.

În mod similar, pentru arcul MM', aflat la distanţa r faţă de axa barei, se obţine:

$$\mathbf{MM'} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{d\varphi} = \gamma \cdot \mathbf{dx},$$

din care se deduce lunecarea specifică la raza r

$$\gamma = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{d\varphi}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{r} \cdot \theta. \tag{8.4}$$

Întrucât materialul barei se consideră continuu, omogen, izotrop şi elastic, rotirea elementară dφ are aceeaşi valoare pentru toate punctele unei secţiuni. Deci dφ,

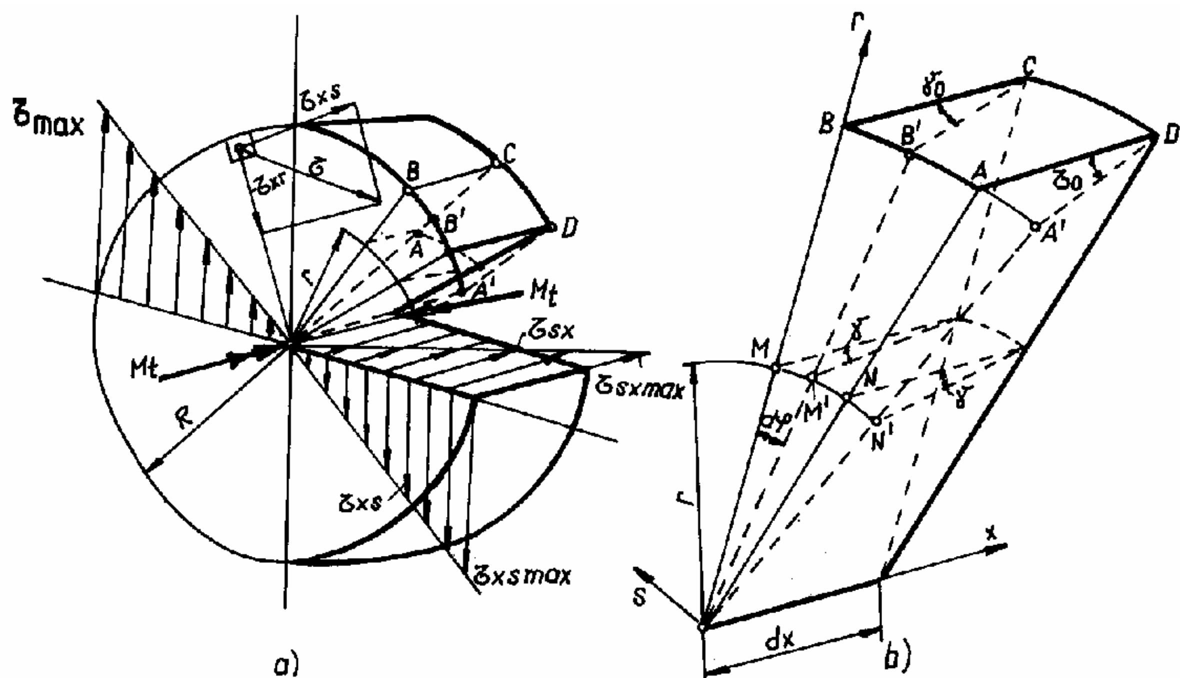


Fig. 8.2

fiind constantă pe toată secţiunea transversală şi rotirea specifică θ rămâne constantă

pe toată lungimea cercului de rază R. Astfel din relația (8.4) rezultă că **lunecarea specifică variază liniar în funcție de r**. Are valoare nulă pe axa barei şi maximă ($\gamma_0 = R \cdot \theta$) pe conturul exterior. Datorită deformațiilor de lunecare în bară se produc tensiuni tangențiale, care se pot determina, pentru solicitări în domeniul liniar-elastic, cu ajutorul legii lui Hooke:

$$\boldsymbol{\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \theta}. \qquad \textbf{(8.5)}$$

Considerăm un element de arie dA aflat la distanța R = d/2 (deci pe conturul exterior al barei, (fig 8.2,a) şi pe aceasta o tensiune tangențială τ având o direcție oarecare. Aceasta are componentele τ_{xs}- tangentă la contur şi τ_{sx} radială. Conform dualității tensiunilor tangențiale unei tensiuni τ_{xs} îi va corespunde o tensiune τ_{sx} pe suprafața exterioară a barei. Deoarece nu s-au luat în considerare forțe de frecare axiale, pe suprafața exterioară a barei, care să producă tensiunea τ_{sx}, aceasta este nulă.

Deci**, tensiunile tangențiale conținute în secțiunea transversală sunt perpendiculare pe rază şi variază proporțional cu aceasta.** Conform legii dualității tensiunilor tangențiale, perechea tensiunii τ_{xs} este tensiunea τ_{sx} şi este conținută în planul axial (fig.8.2,a), adică:

$$\boldsymbol{\tau = \tau_{xs} = \tau_{sx} = \theta \cdot G \cdot r}. \qquad \textbf{(8.5, a)}$$

Scriind ecuația de echivalență dintre efortul M_t şi tensiunile din planul secțiunii transversale vom obține:

$$\boldsymbol{M_t = \int_A r \cdot (\tau \cdot dA)}$$

si înlocuind pe τ din expresia (8.5) se obține:

$$\boldsymbol{M_t = \theta \cdot G \cdot \int_A r^2 \cdot dA = \theta \cdot G \cdot I_p}. \qquad \textbf{(8.6)}$$

În relația de mai sus s-a ținut seama că:

$$\boldsymbol{\int_A r^2 \cdot dA = I_p},$$

este momentul de inerție polar (vezi § 5.4)

Înlocuind mărimile $\theta \cdot G$ din (8.6) cu expresia rezultată din (8.5) se obține formula tensiunii tangențiale la răsucirea barelor de secțiune circulară:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r, \qquad (8.7)$$

din care se poate constata că tensiunea tangențială variază liniar în funcție de rază.

Din relația (8.7), ce este reprezentată grafic în figura (8.2,a), rezultă că tensiunile tangențiale sunt maxime pe conturul exterior al barei:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R = \frac{M_t}{W_p}, \qquad (8.8)$$

în care Wp este **modulul de rezistență polar** şi este dat de relația (vezi § 5.7):

$$W_p = \frac{I_p}{R_{max}}. \qquad (8.9)$$

Formula pentru rotirea specifică rezultă din expresia (8.6) şi este:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p}. \qquad (8.10)$$

Deci, rotirea specifică este direct proporțională cu momentul de răsucire şi invers proporțională cu produsul $G \cdot I_P$ şi care se numeşte rigiditatea la răsucire a barelor de secțiune circulară şi inelară. Rotirea specifică se măsoară în rad/m, sau grade/m. Deformația unghiulară a barei de lungime L sau rotirea relativă a barei, notată cu $\Delta\varphi$, ce reprezintă unghiul cu care se roteşte secțiunea finală față de cea inițială, se obține din relația (8.3) şi (8.10), astfel:

$$\Delta\varphi = \int_L d\varphi = \int_L \theta \cdot dx = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_p}. \qquad (8.11)$$

Dacă bara este omogenă, de secțiune constantă şi efortul M_t este constant pe toată lungimea L, prin integrarea relației (8.11), se obține:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p} \qquad (8.11,a)$$

iar dacă valorile mărimilor de sub integrala (8.11) sunt constante pe porțiuni din lungimea barei, atunci relația (8.11) devine:

$$\Delta\varphi = \sum \frac{M_{ti} \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}}. \qquad \textbf{(8.11, b)}$$

Deşi relațiile (8.7), (8.8), (8.10) şi (8.11) au fost deduse pentru secțiunea circulară se pot demonstra la fel şi pentru secțiunea inelară.

În formulele (8.6)...(8.11), sunt menționate mărimile I_p si W_p care au expresiile:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \qquad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \qquad \textbf{(8.12, a)}$$

pentru secțiunea circulară şi:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \left(1 - k^4\right), \qquad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot \left(1 - k^4\right) \qquad \textbf{(8.12, b)}$$

pentru secțiunea inelară, unde $k = \frac{d}{D}$.

8.3. Calculul de rezistență la răsucire al barelor de secțiune circulară

Calculul de rezistență la răsucire presupune rezolvarea problemelor de verificare, sarcină capabilă şi de dimensionare. Acest calcul are la bază formula tradițională consacrată a condiției de rezistență:

$$\tau_{max} \leq \tau_a, \qquad \textbf{(8.13)}$$

cât şi cea de rigiditate:

$$\theta_{max} \leq \theta_a \ \text{ sau } \ \Delta\varphi_{max} \leq \Delta\varphi, \qquad \textbf{(8.14)}$$

în care τ_{max} se obține din formula (8.8), θ_{max} cu formula (8.10) şi $\Delta\varphi$ cu una din formulele (8.11).

Valorile rezistenței admisibile la răsucire τ_a, respectiv θ_a sau $\Delta\varphi_a$ se stabilesc pentru fiecare ER în funcție de material, condiții de exploatare, rol funcțional, mod de apreciere al forțelor, etc.

1. Problema de verificare se rezolvă folosind formulele:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \le \tau_a \qquad \textbf{(8.15, a)}$$

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \le \theta_a \ \text{ sau } \ \Delta\varphi_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \le \Delta\varphi . \qquad \textbf{(8.15, b)}$$

În funcție de rezultatele obținute se vor da verdictele;

a) BARA REZISTĂ, dacă toate valorile calculate (τ, θ, sau $\Delta\varphi$) sunt inferioare celor admisibile şi cel puțin una este mai mare decât 0,8 din cea admisibilă;

b) BARA NU REZISTĂ, dacă cel puțin o valoare este mai mare cu mai mult de 5% din cea admisibilă;

c) BARA ESTE SUPRADIMENSIONATĂ, dacă toate valorile determinate sunt inferioare valorii de 0,8% din cea admisibilă.

În cazurile b, c se calculează sarcina capabilă.

2. Problemele de capacitate de încărcare se rezolvă cu relațiile:

$$M_{t,cap} = W_p \cdot \tau_a , \qquad \textbf{(8.16, a)}$$

$$M_{t,cap} = G \cdot I_p \cdot \theta_a \ \text{ sau } \ M_{t,cap} = \frac{G \cdot I_p \cdot \Delta\varphi_a}{L} . \qquad \textbf{(8.16, b)}$$

Dintre valorile obținute se ia în considerare valoarea cea mai mică; aceasta se va utiliza în continuare pentru adoptarea unei valori rotunjite, întregi care să satisfacă condiția:

$$0{,}8 \cdot M_{t,cap} < M_t < 1{,}05 \cdot M_{t,cap} .$$

3. Rezolvarea problemelor de dimensionare, implică mai întâi determinarea momentului M_{tmax} (din diagrama de momente), apoi se alege materialul şi se adoptă, τ_a respectiv θ_a sau $\Delta\varphi_a$ şi pentru secțiunea circulară din relațiile (8.8) şi (8.12,a) se obține formula :

$$\mathbf{d_{nec}} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{16 \cdot M_{t\,max}}}{\pi \cdot \tau_a}}\,, \qquad \mathbf{(8.17,a)}$$

iar din formulele (8.10), (8.11), (8.12,a), pentru condiția de rigiditate se obțin formulele:

$$\mathbf{d_{nec}} = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{32M_{t\,max}}}{\pi \cdot \mathbf{G} \cdot \theta_a}} \quad \text{sau} \quad \mathbf{d_{nec}} = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{32M_t \cdot L}}{\pi \cdot \mathbf{G} \cdot \Delta\varphi_a}}\,. \qquad \mathbf{(8.17,\ b)}$$

Pentru barele de secțiune inelară se adoptă raportul k = D/d şi din relațiile (8.8), (8.10), (8.11), (8.12,b), se obține:

$$\mathbf{D_{nec}} = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{16M_{t\,max}}}{\pi \cdot \tau_a \cdot \left(1 - k^4\right)}}\,, \qquad \mathbf{(8.18,\ a)}$$

si respectiv:

$$\mathbf{D_{nec}} = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{32M_{t\,max}}}{\pi \cdot \mathbf{G} \cdot \theta_a \cdot \left(1 - k^4\right)}} \quad \text{sau} \quad \mathbf{D_{nec}} = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{32M_{t\,max} \cdot L}}{\pi \cdot \mathbf{G} \cdot \Delta\varphi_a \cdot \left(1 - k^4\right)}}\,. \qquad \mathbf{(8.18,\ b)}$$

Când se iau în considerare atât condiția de rezistență cât şi cea de rigiditate, rezultă două valori pentru diametrul ER. Se adoptă valoarea cea mai mare prin rotunjire.

Aplicația 8.1. Să se dimensioneze un arbore din oțel ($G = 8{,}1 \cdot 10^3$ MPa, τ_a= 80 MPa, θ_a= 1 grad/m) care transmite o putere de P^*= 30 kW la o turație de n = 200 rot/min. Arborele se va calcula în cele două cazuri:

a). secțiune circulară

b). secțiune inelară k= D/d = 0,8.

Rezolvare:

Momentul de torsiune se determină ca fiind:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^*}{n} = \frac{30 \cdot 30}{\pi \cdot 200} = 1{,}432 \text{ kNm}$$

a). Secțiunea circulară:

$$d^{`} = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1432 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80}} = 45{,}01$$

,

$$d''_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1432 \cdot 10^3}{\pi \cdot 81 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{}}$$

.

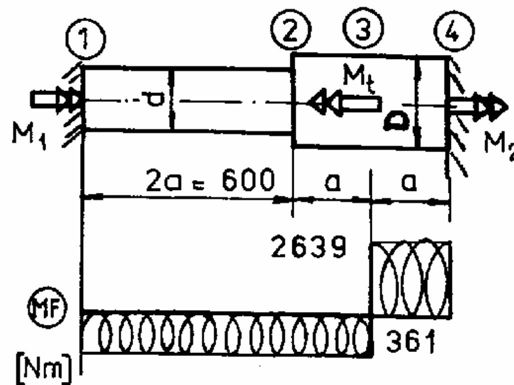


Fig. 8.3

Se adoptă d = 60 mm.

Observație: Nu se poate adopta o valoare mai mică (d=55 mm) decât cea calculată pentru că la verificarea, în condiția de rigiditate se obține:

$$\theta_{max} = \frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot D^4} = \frac{32 \cdot 1{,}432 \cdot 10^6}{\pi \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 55^4} \cdot \frac{180 \cdot 10^3}{\pi} = 1{,}128\ ^o/\ m > 1{,}05 \cdot \theta_a .$$

b). Secțiunea inelară:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_a \cdot \left(1 - k^4\right)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}432 \cdot 10^6}{\pi \cdot \left(1 - 0{,}8^4\right) \cdot 80}} = 53{,}65 \text{ mm}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a \cdot \left(1 - k^4\right)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1{,}432 \cdot 10^6}{\pi \cdot \left(1 - 0{,}8^4\right) \cdot 81 \cdot 10^3} \cdot \frac{10^3 \cdot 180}{3 \cdot \pi}} = 64{,}66 \text{ mm}$$

Se adoptă: D = 65 mm, d = 52 mm.

Economia de material, prin utilizarea acestei secțiuni inelare este de:

$$\frac{A_I - A_{II}}{A_I} \cdot 100 = \frac{60^2 - \left(65^2 - 52^2\right)}{60^2} \cdot 100 = 57{,}75\%.$$

Aplicația 8.2 Să se dimensioneze arborele din fgura 8.3 încastrat la capete şi solicitat de un moment de torsiune M_0=3 kNm. Tensiunea admisibiă este de $\tau_a = 110 \text{ MPa}$, iar d = 0,75D.

Rezolvare:

Aspectul static este:

$$M_{t1} + M_{t2} = M_t ,$$

iar aspectul geometric se scrie:

$$\Delta\varphi_{1\text{-}2} + \Delta\varphi_{2-3} + \Delta\varphi_{3\text{-}4} = 0$$

din care rezultă aspectul fizic:

$$\frac{M_{t1}\cdot 2a}{G\cdot I_{P1}} + \frac{M_{t1}\cdot a}{G\cdot I_{P2}} + \frac{\left(M_{t1} - M_{t}\right)\cdot a}{G\cdot I_{P2}} = 0.$$

Simplificând termenii asemenea şi înlocuind d = 0,75D, rezultă:

$$M_{t1} = \frac{M_t}{\frac{2}{0{,}75^4} + 1 + 1} = \frac{0{,}75^4 \times 3000}{2\cdot\left(1 + 0{,}75\right)} = 361\ \text{Nm},$$

$$M_{t2} = M_t - M_{t1} = 3000 - 360{,}5 = 2639\ \text{Nm}$$

Diametrele necesare pentru arbore sunt :

$$d_{necI\text{-}2} = \sqrt[3]{\frac{16M_{t1-2}}{\pi\cdot\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 361\cdot 10^3}{\pi\cdot 110}} = 25{,}57\ \text{mm},$$

şi rezultă: $D_{1-2} = \frac{d_{1-2}}{0{,}75} = 34{,}04\,\text{mm}$.

$$D_{nec\ 2\text{-}4} = \sqrt[3]{\frac{16M_{t3-4}}{\pi\cdot\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 2639\cdot 10^3}{\pi\cdot 110}} = 49{,}62\ \text{mm}.$$

Se adoptă valorile: **D = 50 mm, d = 37,5 mm.**

8.4. Energia de deformaţie la răsucirea barelor de secţiune circulară şi inelară

Considerând un volum elementar din bară, datorită acţiunii tensiunilor tangenţiale τ şi a lunecării specifice elementare γ, se produce lucrul mecanic elementar specific (fig. 8.4): $\mathbf{dL_1 = \tau\cdot d\gamma}$

Solicitarea fiind în domeniul liniar elastic $\mathbf{\tau = G\cdot\gamma}$, astfel că $\mathbf{d\gamma = \frac{d\tau}{G}}$, iar lucrul mecanic elementar va fi egal cu energia de deformaţie, conform ipotezei că în

domeniul elastic întreg lucrul mecanic efectuat prin încărcarea barei se acumulează în volumul acesteia sub formă de energie de deformație:

$$\mathbf{dL_1 = dU_1 = \tau \cdot d\gamma = \frac{\tau}{G} \cdot d\tau.}$$

Grafic acest lucru mecanic, respectiv energia de deformație elementară sunt reprezentate prin trapezul haşurat din figura 8.4.

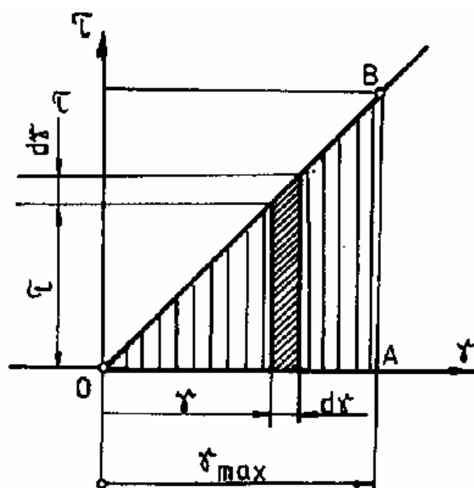


Fig. 8.4

Energia specifică de deformație înmagazinată în elementul de volum unitar când tensiunea creşte lent de la 0 la τ va avea forma următoare:

$$\mathbf{U_1 = \int_0^{\tau} dU_1 = \int_0^{\tau} \tau \cdot \frac{d\tau}{G} = \frac{\tau^2}{2G}} \qquad \mathbf{(8.19)}$$

iar cea acumulată în volumul elementar este:

$$\mathbf{dU = U_1 \cdot dV = \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV.}$$

Pentru bara dreaptă de secțiune circulară:

$$\mathbf{\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r, \quad I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad dV = dA \cdot dx,}$$

aşa că energia de deformație acumulată în bara de secțiune circulară, de lungime L, solicitată la răsucire va avea valoarea:

$$\mathbf{U = \int_V dU = \int_V \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV = \int_L \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p^2} \int_A r^2 \cdot dA = \int_L \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p}.} \qquad \mathbf{(8.20)}$$

Dacă bara este omogenă, de secțiune circulară constantă şi solicitată pe toată lungimea de acelaşi M_t, atunci energia de deformație acumulată va avea valoarea:

$$\mathbf{U = \frac{M_t^2 \cdot L}{2G \cdot I_p} = \frac{16 \cdot M_t^2 \cdot L}{G \cdot d^4}.} \qquad \mathbf{(8.21)}$$

Dacă bara este de secțiune inelară cu factorul dimensional $k = \frac{d}{D}$, energia de deformație va avea expresia:

$$\mathbf{U} = \frac{16\mathbf{M}_{\mathbf{t}}^{2} \cdot \mathbf{L}}{\pi \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{D}^{4} \cdot \left(1 - \mathbf{k}^{4}\right)}. \qquad \mathbf{(8.21,a)}$$

8.5. Calculul arcurilor elicoidale cu pas mic

Arcul elicoidal se confecționează dintr-o sârmă de oțel avînd diametrul d care se înfăşoară pe un cilindru sub forma unei spirale. Distanța D/2 de la axa cilindrului la axa sârmei înfăşurate, se numeşte **rază de înfăşurare**. Asupra arcului acționează o forță P de-a lungul axei cilindrului. Dacă forța se va reduce în centrul de greutate al unei spire se va obține o forță P şi un moment M = P · R.

Descompunînd forța P şi momentul M după axa spirei şi perpendicular pe aceasta se obțin eforturile:

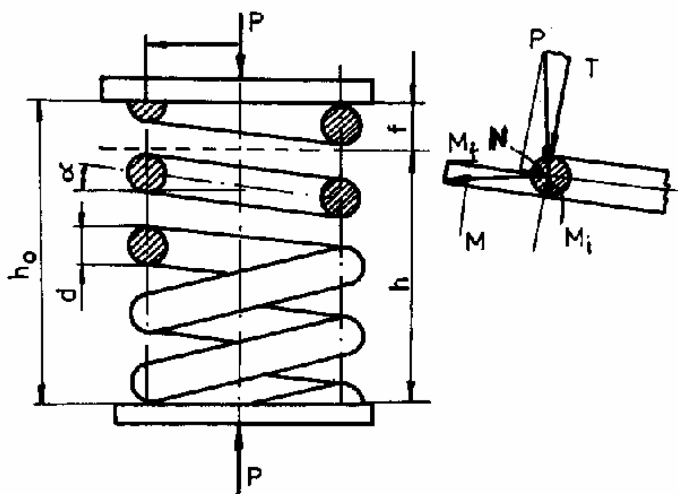
$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot \sin\alpha\ ;$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \cos\alpha\ ;$$
$$\mathbf{M}_{\mathbf{t}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{t}} \cdot \cos\alpha\ ;$$
$$\mathbf{M}_{\mathbf{i}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sin\alpha.$$

La arcurile elicoidale cu pas mic unghiul de înfăşurare al spirei are valori mci, astfel că se poate face aproximarea:

$$\sin\alpha \approx 0\ ;\ \cos\alpha \approx 1$$

În acest caz eforturile din orice secțiune a arcului sunt:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{t}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{2}} \text{ şi } \quad \mathbf{T} = \mathbf{P}. \qquad \mathbf{(8.22)}$$



Tensiunea tangențială produsă de forța tăietoare este foarte mică în comparație cu cea produsă de momentul de torsiune, astfel că se va lua în calcul numai efectul momentului de torsiune. Va rezulta :

Fig. 8.5

$$\tau_{max} = \frac{\mathbf{M_t}}{\mathbf{W_p}} = \frac{16\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}}{\mathbf{2\pi}\cdot\mathbf{d}^3} == \frac{8\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}}{\pi\cdot\mathbf{d}^3}. \qquad \textbf{(8.23)}$$

Relația (8.23) se utilizează în calculul de rezistență pentru:

verificare, capacitate de încărcare, dimensionare,

Din această relație se obține diametrul spirei:

$$\mathbf{d_{nec}} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{8}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}}{\tau_{\mathbf{a}}\cdot\pi}} \qquad \textbf{(8.24)}$$

Rezistența admisibilă a oțelurilor pentru arcuri (OLC55A, OLC65A, OLC75A, OLC85A, 51SI17A, 60SI15A, 51CR11A), se ia: τ_a= 400..800 MPa.

Deformația arcului se defineşte ca fiind scurtarea sau lungirea acestuia sub acțiunea unei solicitări (fig.8.5) şi **se numeşte săgeată.**

Relația de determinare a săgeții se obține considerând egalitatea dintre lucrul mecanic al forțelor exterioare aplicate şi energia potențială de deformație acumulată în volumul arcului. Ținând seama că $L = \frac{P\cdot f}{2}$, iar energia de deformație este dată de relația (8.20), în care se fac substituirile:

$$\mathbf{M_t} = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}}{\mathbf{2}}; \qquad \mathbf{L} = \pi\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{n},$$

egalitatea L = U devine :

$$\frac{\mathbf{P \cdot f}}{\mathbf{2}} = \int_L \frac{\mathbf{M_t^2 \cdot dx}}{\mathbf{2G \cdot I_p}},$$

respectiv:

$$\frac{\mathbf{P \cdot f}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{16 \cdot \pi \cdot D \cdot n \cdot \left(\frac{P \cdot D}{2}\right)^2}}{\mathbf{\pi \cdot G \cdot d^4}} \quad ,$$

din care rezulta formula pentru săgeată:

$$\mathbf{f = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}}. \qquad \textbf{(8.25)}$$

Aplicația 8.3 Să se verifice arcurile suspensiei din figura 8.6, solicitate de o forță P = 3,2 kN, dacă elementele arcurilor sunt D_1= 64 mm, d_1= 8 mm, n_1=10 spire, D_2= 80 mm, d_2=10 mm, n_2=8 spire.

Rezolvare:

a) Aspectul static:

$$P_1 + P_2 = P,$$

b) Aspectul geometric:

$$f_1 = f_2,$$

c) Aspectul fizic:

$$\frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G \cdot d_1^4} = \frac{8 \cdot (P - P_1) \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G \cdot d_2^4},$$

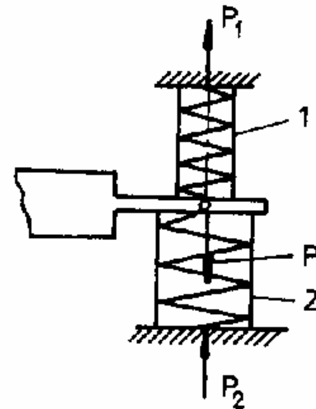


Fig. 8.6

din care rezultă:

$$P_1 = \frac{P}{1 + \frac{d_2^4}{d_1^4} \cdot \frac{D_1^3}{D_2^3} \cdot \frac{n_1}{n_2}} = \frac{3200}{1 + \frac{10^4}{8^4} \cdot \frac{64^3}{80^3} \cdot \frac{10}{8}} = 1294 \text{ N},$$

$$P_2 = P - P_1 = 3200 - 1294 = 1951 \text{ N}.$$

Tensiunile tangențiale în cele două spire rezultă:

$$\tau_{1max} = \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{8 \cdot 1249 \cdot 64}{\pi \cdot 8^3} = 397{,}77 \text{ MPa} < \tau_a,$$

$$\tau_{2\max} = \frac{8 \cdot P_2 \cdot D_2}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{8 \cdot 1951 \cdot 80}{\pi \cdot 10^3} = 397{,}65 \text{ MPa} < \tau_a .$$

Deci, SUSPENSIA REZISTĂ.

Observație: Deoarece tensiunile maxime din arcuri sunt apropiate de valoarea admisibilă se poate spune că această suspensie a fost proiectată economic.

8.6. Răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară

Teoria generală a răsucirii barelor de secțiune oarecare a fost elaborată de Barré de Saint-Venant şi are la bază o demonstrație complicată. Ipoteza secțiunilor plane, verificată şi utilizată pentru secțiunile circulare şi inelare nu mai corespunde la barele de secțiune oarecare. Acestea se deplanează prin răsucire.

Pe suprafața unei bare de secțiune dreptunghiulară, în stare nesolicitată (fig.8.7,a), se trasează linii drepte echidistante, paralele şi perpendiculare pe axa barei. Se obține o rețea de dreptunghiuri.

După solicitarea la răsucire, bara se deformează ca în fig.8.7,b, la care se

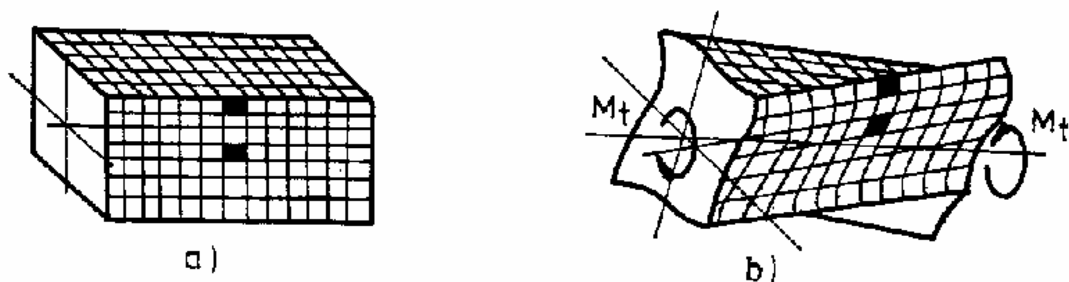


Fig. 8.7

observă că:

a) dreptunghiurile din imediata vecinătate a muchiilor barei îşi păstrează forma, deci în aceste puncte deformațiile şi tensiunile sunt nule;

b) dreptunghiurile aflate în imediata vecinătate a mijlocului feţelor îşi schimbă cel mai mult forma, devenind paralelograme. Deci, în apropierea mijlocului laturilor lunecările vor fi maxime şi ca atare aici se vor produce tensiunile maxime.

Distribuția tensiunilor tangențiale, determinată de Saint-Venant, este prezentată în figura 8.8.

Variația tensiunilor tangențiale nu este liniară pe nici o direcţie. În colțurile dreptunghiului şi în axa de simtrie Ox, tensiunile tangențiale sunt nule.

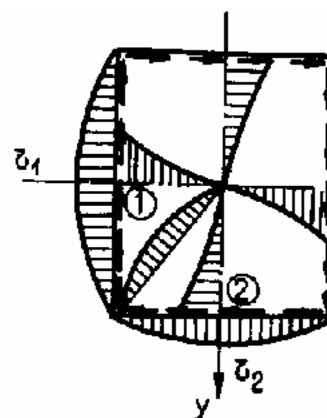


Fig. 8.8

Pentru secțiunile dreptunghiulare cu raportul h/b mic se poate considera că tensiunile tangențiale de pe contur variază parabolic. Dacă h/b este mare (profile subțiri) se poate considera că τ este constant pe latura mare şi variază liniar pe grosime.

Relațiile de calcul deduse de Barré de Saint-Venant, sunt:

- Pentru tensiunea tangențială maximă ce se produce pe mijlocul laturii mari a dreptunghiului:

$$\tau_{max} = \tau_1 = \frac{\mathbf{M_t}}{\mathbf{k_1 \cdot h \cdot b^2}}, \qquad \mathbf{(8.26)}$$

- Pentru tensiunea tangențială la mijlocul laturii mici este:

$$\tau_2 = \mathbf{k_3} \cdot \tau_{max}, \qquad \mathbf{(8.27)}$$

- Pentru rotirea specifică, a barelor de secțiune dreptunghiulară:

$$\theta = \frac{\mathbf{M_t}}{\mathbf{k_2 \cdot G \cdot h \cdot b^3}} \qquad \mathbf{(8.28)}$$

În relația de mai sus s-a notat cu b latura mai mică a secțiunii dreptunghiulare iar k_1, k_2, k_3, depind de raportul h/b al laturilor.Valorile acestor coeficienți sunt date în tabelul (8.1) .

Tabelul 8.1

h/b	1	1,20	1,50	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0
k_1	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307
k_2	0,141	0,166	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,294	0,299	0,307
k_3	1,000	0,93	0,86	0,82	0,795	0,766	0,753	0,754	0,744	0,743	0,742

Pentru valori mari ale raportului h/b (h/b ≥10) se poate lua: k_1= k_2= 1/3, iar relațiile (8.17) şi (8.19) devin:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{h \cdot b^2}\ ;\ \theta = \frac{3M_t}{G \cdot h \cdot b^3}. \quad \textbf{(8.29)}$$

Dacă vom nota cu :

$$W_t = k_1 \cdot h \cdot b^2, \quad \textbf{(8.30,a)}$$

şi pe care o numim, caracteristica geometrică de rezistență la răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară şi cu:

$$I_t = k_2 \cdot h \cdot b^3, \quad \textbf{(8.30, b)}$$

numită caracteristica geometrică de rigiditate la răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară, relațiile (8.26) şi (8.28) devin:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad \textbf{(8.26, a)}$$

şi

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_t}, \quad \textbf{(8.28, a)}$$

ceea ce permite generalizarea calculului şi pentru alte forme de secțiuni.

Expresiile caracteristicilor geometrice de rezistență W_t şi de rigiditate I_t, pentru alte forme de secțiuni, sunt date în Anexa nr.6.

Calculul rotirii relative Δφ se va face cu relațiile:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_t} \quad \text{sau} \quad \Delta\varphi = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_{ti}}$$

Aplicația. 8.4. Bara de secțiune dreptunghiulară din figura 8.9 este confecționată din oțel (G = 81GPa). Să se determine tensiunea maximă şi rotirea relativă totală dacă este solicitată de un moment de torsiune $M_t = 20$ kNm.

Rezolvare: Tensiunea maximă se produce la mijlocul laturii mari a dreptunghiului şi este egală cu:

$$\tau_{max} = \tau_1 = \frac{M_t}{k_1 \cdot h \cdot b^2} = \frac{10 \cdot 10^6}{0{,}231 \cdot 150 \cdot 100^2} = $$
$$= 57{,}72 \text{ MPa};$$

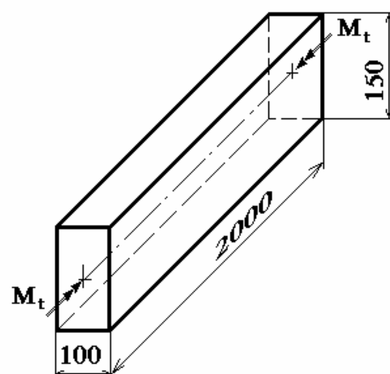


Fig. 8.9

iar tensiunea tangențială la mijlocul laturii mici este:

$$\tau_2 = k_3 \cdot \tau_1 = 0{,}86 \cdot 57{,}72 = 49{,}64 \text{ MPa}.$$

În relațiile de mai sus s-au înlocuit k_1= 0,231 şi k_3= 0,86 pentru h/b = 1,5, (Anexa 6).

Rotirea relativă totală va fi

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_t} = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot k_2 \cdot h \cdot b^3} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 2000}{0{,}196 \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 100^3} = 1{,}680 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0{,}9624^{\circ},$$

unde, k_2= 0,196 tot pentru h/b = 1,5, (Anexa 6).

Aplicația 8.5. Bara cu secțiune eliptică având raportul semiaxelor b/a = 2 este confecționată din oțel cu G = 81 GPa, τ_a= 80 MPa şi θ_a= 2 °/m (fig.8.10) şi se cere:

a) dimensionarea barei şi variația tensiunilor pe secțiune;

b) tensiunile efective în cazul unei bare circulare de aceeaşi arie cu cea eliptică;

c) economia de material dacă se adoptă bară de secțiune circulară.

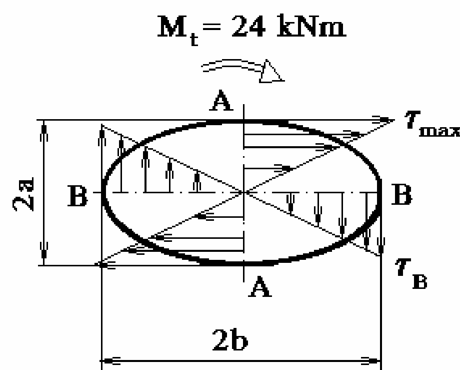


Fig.8.10

Rezolvare:

a) Din anexa 6 se obține:

$$W_t = \frac{\pi \cdot b \cdot a^2}{2} \quad \text{şi} \quad I_t = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2},$$

iar din relația de dimensionare va fi:

- din condiția de rezistență:

$$W_{t_{nec}} = \frac{M_t}{\tau_a},$$

se obține:

$$a_{nec} = \sqrt[4]{\frac{M_t}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[4]{\frac{24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80}} = 45{,}71\,\text{mm}.$$

- din condiția de rigiditate:

$$I_{t_{nec}} = \frac{M_t}{G \cdot \theta_a},$$

sau

$$a_{nec} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot M_t}{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 24 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 10^3}{8 \cdot \pi \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}} = 36{,}05\,\text{mm}.$$

Se adoptă a = 46 mm şi b = 92 mm.

Vor rezulta următoarele tensiuni:

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot M_t}{\pi \cdot b \cdot a^2} = \frac{24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 92 \cdot 46^2} = 78{,}49 \text{ MPa};$$

$$\tau_B = \frac{2 \cdot M_t}{\pi \cdot b^2 \cdot a} = \frac{24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 92^2 \cdot 46} = 39{,}24 \text{ MPa},$$

iar reprezentarea este dată în figura 8.10.

b) Din egalitatea ariilor rezultă:

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} = \pi \cdot a \cdot b;$$

$$d = \sqrt{4 \cdot a \cdot b} = \sqrt{4 \cdot 92 \cdot 46} = 130{,}1 \ \text{mm}.$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 \cdot 24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 130{,}1^3} = 55{,}63 \ \text{MPa}.$$

c) Dimensionarea barei de secțiune circulară:

- din condiția de rezistență:

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80}} = 115{,}2 \ \text{mm}.$$

- din condiția de rigiditate:

$$d_{nec} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 24 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 10^3}{\pi \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot \pi}} = 96{,}43 \ \text{mm}.$$

Se adoptă $d = 115$ mm.

Economia de material în (%) va fi:

$$n = \frac{A_1 - A_2}{A_1} \cdot 100 = \frac{\pi \cdot 92 \cdot 46 - \frac{\pi \cdot 115^2}{4}}{\pi \cdot 92 \cdot 46} \cdot 100 = 21{,}86\%.$$

deci rezultă o economie de 21,86 % în cazul utilizării secțiunii circulare în locul celei eliptice.

Aplicația 8.6. Să se determine forța capabilă şi săgeata corespunzătoare acesteia la un arc elicoidal confecționat din sârmă pătrată de latură a = 8 mm, n = 8 spire şi D = 60 mm, dacă τ_a= 230 MPa şi G = 81 GPa.

Rezolvare:

$$W_t = k_1 \cdot b \cdot t^2 = 0{,}208 \cdot 8^3 = 106{,}5 \ \text{mm}^3,$$

$$I_t = k_2 \cdot b \cdot t^3 = 0{,}141 \cdot 8^4 = 557{,}5 \ \text{mm}^4.$$

Aplicând relațiile (8.30) şi (8.21) obținem:

$$P_{cap} = \frac{\tau_a \cdot W_t}{R} = \frac{230 \cdot 106{,}5}{30} = 816{,}5 \ \text{N} \ ; \ P = 800 \ \text{N}$$

Considerând egalitatea L = U (vezi § 8.4) în cazul secțiunii drepunghiulare se obține:

$$f = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot n}{4G \cdot I_t} = \frac{\pi \cdot 0{,}8 \cdot 60^3 \cdot 8}{4 \cdot 81 \cdot 577{,}5} = 23{,}21 \text{ mm} .$$

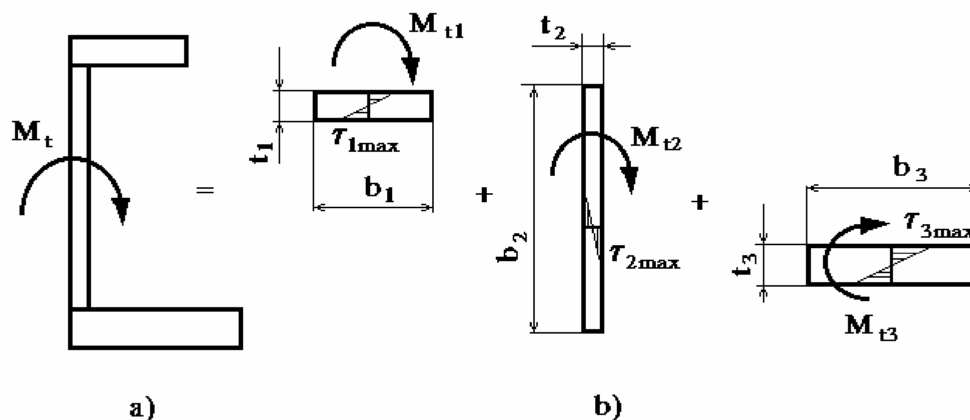


Fig. 8.11

8.7. Răsucirea barelor cu pereți subțiri, deschise

Prin bare cu pereți subțiri deschise se înțeleg profilele laminate sub formă L, T, U, I, sau alte forme obținute prin laminare sau prin îndoire şi/sau sudare din benzi de tablă laminată. În această categorie intră profilele ce au elemente de grosime mică (h ≥ 10 ·b) şi nu închid goluri (secțiunea este simplu conexă) sau dacă închid un gol au cel puțin o generatoare nesudată.

Se consideră bara din figura 8.11 solicitată la răsucire. Elementele ce compun bara sunt cele două tălpi şi inima.

Problema se tratează descompunând bara în trei dreptunghiuri componente şi din cele trei aspecte rezultă:

a) - Din **aspectul static**:

$$\mathbf{M_t = M_{t1} + M_{t2} + M_{t3} = \sum M_{t\,i}},$$

b) - Din **aspectul geometric:**

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$$

c) - Din **aspectul fizic:**

$$\frac{M_{t1}}{G \cdot I_{t_1}} = \frac{M_{t_2}}{G \cdot I_{t_3}} = \frac{M_{t_3}}{G \cdot I_t} = \frac{M_{t_3} + M_{t_2} + M_{t_3}}{G \cdot \left(I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3}\right)} = \frac{M_t}{G \cdot I_{t_d}}$$

Din această relație rezultă **caracteristica geometrică de rigiditate la răsucirea barelor cu pereți subțiri, profil deschis:**

$$I_{t_d} = I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3} = \sum I_{t_i} = \frac{1}{3} \cdot \sum b_i \cdot t_i^3 . \qquad \textbf{(8.31)}$$

În cazul profilelor subțiri laminate se ia:

$$I_{t_d} = \left(I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3}\right) = \sum I_{t_i} = \frac{\alpha}{3} \sum b_i \cdot t_i^3 ,$$

în care $\alpha = 1$ la profilele cornier, $\alpha = 1{,}1....1{,}2$ la profilele U iar $\alpha = 1{,}3$ la profilele I.

Din relația aspectului fizic se obține:

$$M_{ti} = M_t \frac{I_{t_i}}{I_{t_d}},$$

astfel că tensiunea maximă pe conturul elementului i rezultă:

$$\tau_{i\,max} = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} b_i \cdot t_i^2} \cdot \frac{\frac{1}{3} b_i \cdot t_i^3}{I_{t_d}} = \frac{M_t}{I_{t_d}} \cdot t_i .$$

Deci, tensiunea maximă este funcție de grosimea t_i a profilului. Rezultă că tensiunea cea mai mare (dintre τ_i) va exista în elementul de grosimea cea mai mare (t_{max}):

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_{t_d}} \cdot t_{max} = \frac{M_t}{W_{t\,d}} . \qquad \textbf{(8.32)}$$

Mărimea

$$W_{t\,d} = \frac{I_t}{t_{max}} = \frac{\alpha}{3 t_{max}} \sum b_i \cdot t_i^3 , \qquad \textbf{(8.33)}$$

se numeşte **caracteristică geometrică de rezistenţă la răsucire a profilului cu pereţi subţiri, profil deschis** şi este similară modulului de rezistenţă polar de la secţiunea circulară.

Din aspectul fizic se poate scrie:

$$\theta = \frac{\mathbf{M_t}}{\mathbf{G \cdot I_{td}}}, \qquad \mathbf{(8.34)}$$

şi respectiv:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{\mathbf{M_t \cdot dx}}{\mathbf{G \cdot I_{td}}} = \sum \frac{\mathbf{M_{ti} \cdot L_i}}{\mathbf{G \cdot I_{td}}}. \qquad \mathbf{(8.35)}$$

Aplicaţia 8.7. Să se calculeze momentul de răsucire capabil să-l suporte secţiunea din figura 8.12 şi corespunzător acestuia, rotirea specifică (secţiunea se compune din două profileU 20 fără să fie sudate între ele). Se cunoaşte: τ_a=210 MPa.

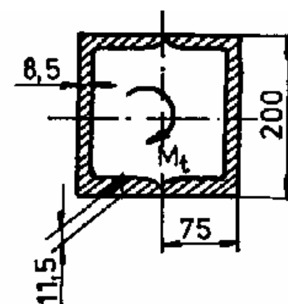


Fig. 8.12

Rezolvare :

Caracteristicile geometrice ale secţiunii sunt:

$$I_{t_d} = \frac{1}{3}\sum b_{.} \cdot t_i^3 = 2 \cdot \frac{1,15}{3} \cdot \left[2 \cdot 0,85^3 + (2 \cdot 7,5 - 0,85) \cdot 1,15^3\right] = 17,44\,\text{cm}^4,$$

$$W_{t\,d} = \frac{I_{td}}{b_{max}} = \frac{17,44}{1,15} = 15,166\,\text{cm}^3.$$

Momentul de torsiune capabil rezultă:

$$M_{tcap} = \tau_a \cdot W_{td} = 15,166 \cdot 120 \cdot 10^{-3} = 1,8199 \ \text{Nm}.$$

Se adoptă: M_t= 1800 Nm.

Rotirea specifică corespunzătoare este:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_{td}} = \frac{1800 \cdot 10^3}{81 \cdot 10^3 \cdot 17,44 \cdot 10^4} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 10^3 = 7,3\ {}^0/\,\text{m} \ .$$

8.8 . Răsucirea barelor cu pereți subțiri închise

Considerăm o bară tubulară cu pereți subțiri, ce are secțiunea transversală de formă oarecare, dar constantă în lungul barei (fig.8.13,a). Notăm cu Ω aria închisă de fibra medie a profilului secțiunii, cu s lungimea fibrei medii şi cu t grosimea peretelui. Sub acțiunea momentului de torsiune, în secțiune se produc tensiuni tangențiale paralele la linia medie a profilului. Se admite că la grosimi mici ale peretelui aceste tensiuni **sunt repartizate uniform pe toată grosimea peretelui.** Această ipoteză concordă cu atât mai bine cu realitatea cu cât grosimea peretelui este mai mică.

Izolăm din bară un element de lungime dx (fig. 8.13,b). Din aceasta detaşăm o fâşie longitudinală cuprinsă între generatoarele $\langle 1 \rangle$ şi $\langle 2 \rangle$. Pe fețele fâşiei apar tensiuni tangențiale care satisfac **legea dualității tensiunilor tangențiale** (fig. 8.13,b). Din condiția de echilibru a forțelor elementare se obține:

$$\tau_1 \cdot t_1 \cdot dx = \tau_2 \cdot t_2 \cdot dx \ ,$$

din care rezultă că în orice punct al secțiunii transversale produsul $\boldsymbol{\tau \cdot t}$ este constant:

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \tau_i \cdot t_i = ct. \qquad \textbf{(8.36)}$$

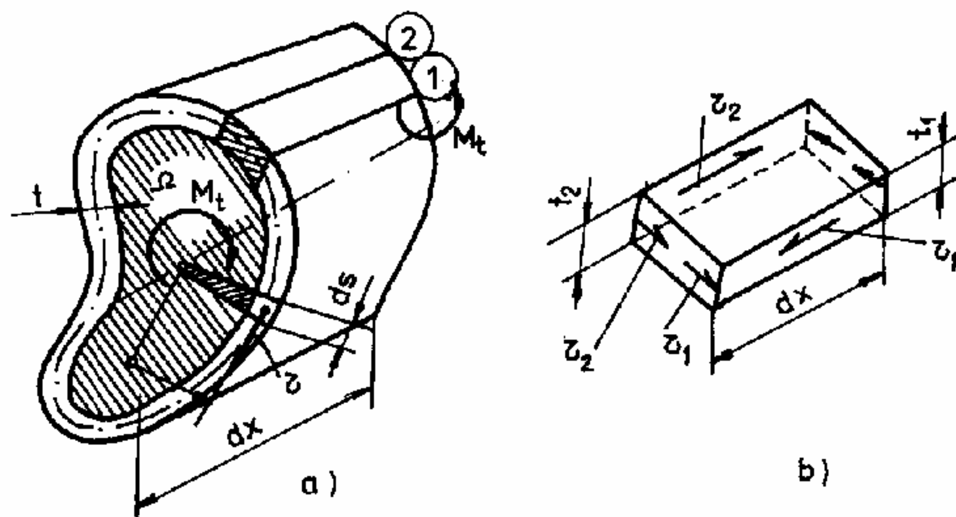


Fig. 8.13

Acest produs se numeşte **flux al tensiunilor tangenţiale.** Deci valoarea tensiunilor tangenţiale este maximă unde grosimea peretelui este minimă şi are valoarea minimă unde grosimea peretelui este maximă.

Din relaţia de echilibru a elementului obţinem:

$$M_t = \int_A r \cdot \tau \cdot dA = \oint_S \tau \cdot r \cdot t \cdot ds,$$

unde s-a notat cu **r** braţul efortului tangenţial **dT = τ · dA,** de la acesta la centrul de răsucire O şi **dA = t ·ds**.

Din figură se observă că $\mathbf{d\Omega = \frac{r \cdot ds}{2}}$, adică aria triunghiului elementar corespunzător lungimii de arc ds pe fibra medie. Cu această notaţie momentul de răsucire rezultă :

$$M_t = \tau \cdot t \cdot \oint_S r \cdot ds = 2\tau \cdot t \cdot \Omega,$$

iar expresia tensiunii tangenţiale este:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot t \cdot \Omega}. \qquad \textbf{(8.37,a)}$$

Tensiunea maximă care se produce în dreptul grosimii celei mai mici, este:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2 \cdot t_{min} \cdot \Omega} = \frac{M_t}{W_{t[}} \qquad \textbf{(8.37)}$$

în care,

$$\mathbf{W_{tî}=2 \cdot t_{min} \cdot \Omega}, \qquad \textbf{(8.38)}$$

este **caracteristica geometrică de rezistență la răsucire a barelor cu pereți subțiri profil închis**.

Pentru determinarea rotirii specifice se scrie egalitatea dintre lucrul mecanic exterior, produs prin aplicarea momentului de răsucire, pe un element de lungime $\mathbf{dx = 1}$, cu energia de deformare potențială acumulată în element .

$$\frac{M_t \cdot \theta}{2} = \int \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV \ .$$

Înlocuind pe τ din relația (8.37,a) şi pe $dV = 1 \cdot t \cdot ds$, se obține:

$$\theta = \frac{M_t}{4G \cdot \Omega^2} \oint \frac{ds}{t} = \frac{M_t}{G \cdot I_{t[}}, \qquad \textbf{(8.39)}$$

în care mărimea:

$$I_{ti} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{s}{t}} \qquad \textbf{(8.40)}$$

este **caracteristica geometrică de rigiditate la răsucire a barelor cu pereți subțiri profil închis.**

Relațiile (8.34) şi (8.35) sunt **formulele lui R. Bredt.**

Dacă grosimea peretelui este constantă în lungul fibrei medii atunci se obține:

$$\theta = \frac{M_t \cdot s}{4 \cdot G \cdot t \cdot \Omega^2}. \qquad \textbf{(8.41)}$$

Analog ca la celelalte structuri rotirea relativă se determină cu relația:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_{t[}} = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_{t[}}. \qquad \textbf{(8.42)}$$

Aplicație 8.8. Pentru bara din oțel (G = 81 GPa, şi τ_a=90 MPa) cu secțiunea din figura 8.14 se cer:

a) caracteristicile geometrice la răsucire, profil deschis şi profil închis;

b) momentul de torsiune capabil;

c) rotirile specifice maxime corespunzătoare momentelor de torsiune calculate;

d) tensiunile tangențiale şi diagramele de variație pe secțiune.

Rezolvare:

a) caracteristici geometrice:

- profil deschis:

Secțiunea dată se descompune în dreptunghiuri subțiri. La arce de cerc lungimea dreptunghiului este egală cu desfăşurata pe fibra medie.

$$I_{td} = \frac{\alpha}{3} \cdot \sum b_i \cdot t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 8 \cdot 0{,}6^3 + \pi \cdot 5{,}3 \cdot 0{,}6^3 + 13 \cdot 1{,}2^3\right) = 9{,}839\,cm^4$$

$$W_{td} = \frac{I_{td}}{t_{max}} = \frac{9{,}839}{1{,}2} = 8{,}2\,cm^3.$$

- profil închis:

Se duce fibra medie şi se calculează aria închisă de aceasta:

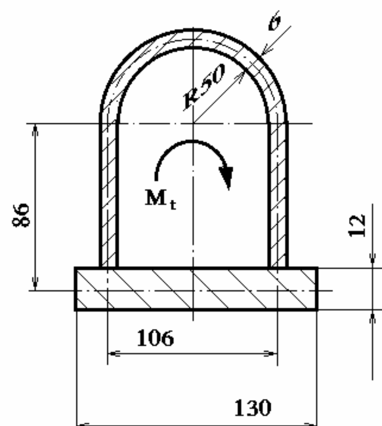


Fig. 8.14

$$\Omega = 10{,}6 \cdot 8{,}6 + \frac{\pi \cdot 5{,}3^2}{2} = 135{,}2\,cm^2,$$

$$W_{ti} = 2 \cdot \Omega \cdot t_{min} = 2 \cdot 135{,}2 \cdot 0{,}6 = 162{,}3\,cm^3,$$

$$I_{ti} = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\sum \frac{s}{t}} = \frac{4 \cdot 135{,}2^2}{\frac{10{,}6}{1{,}2} + \frac{2 \cdot 8{,}6}{0{,}6} + \frac{\pi \cdot 5{,}3}{0{,}6}} = 1122\,cm^4.$$

În ultima relație s înseamnă lungimea fibrei medii:

b) Momentele de torsiune capabile:

$$M_{tcap,d} = \tau_a \cdot W_{td} = 90 \cdot 8{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}738 \text{ kNm},$$

$$M_{tcap,i} = \tau_a \cdot W_{ti} = 90 \cdot 162{,}3 \cdot 10^{-3} = 14{,}61 \text{ kNm}.$$

Se adoptă:

M_{td}= 0,75 kNm;

M_{ti}= 14,5 kNm.

c) Rotirile specifice maxime se determină cu relațiile (8.34) şi (8.40) şi se obține:

$$\theta_{max_d} = \frac{M_t}{G \cdot I_{td}} = \frac{0{,}75 \times 10^6}{81 \cdot 10^3 \cdot 9{,}839 \cdot 10^4} = 9{,}411 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} = 5{,}392^{o} \text{ / m},$$

$$\theta_{max_i} = \frac{M_{ti}}{G \cdot I_{ti}} = \frac{14{,}5 \times 10^6}{81 \cdot 10^3 \cdot 1122 \cdot 10^4} = 1{,}595 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} = 0{,}9141^{o} \text{ / m}.$$

d) Se determină tensiunile tangențiale cu relațiile (8.32) şi respectiv (8.37):

- profil deschis:

$$\tau_{td_{max}} = \frac{M_{td}}{W_{td}} = \frac{0{,}75 \cdot 10^6}{8{,}2 \cdot 10^3} = 91{,}46 \text{MPa},$$

$$\tau_{td_i} = \frac{M_{td}}{I_{td}} \cdot t_i = \frac{0{,}75 \cdot 10^6}{9{,}839 \cdot 10^4} \cdot 6 = 45{,}73 \text{MPa}$$

- profil închis:

$$\tau_{ti_{max}} = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = \frac{14{,}5 \cdot 10^6}{162{,}3 \cdot 10^3} = 89{,}3 \text{ MPa},$$

$$\tau_{ti_t} = \frac{M_{ti}}{2 \cdot \Omega \cdot t_t} = \frac{14{,}5 \cdot 10^6}{2 \cdot 135{,}2 \cdot 10^2 \cdot 12} = 44{,}67 \text{ MPa}.$$

Observație: Comparând momentele de torsiune capabile se observă că la acelaşi consum de material profilul închis rezistă de 19,8 ori (14,62/0,738) mai mult decât profilul deschis, iar dacă se compară rotirile specifice se observă că bara realizată din profil deschis este mult mai elastică, de 5,9 ori. Adoptarea uneia sau alteia din soluții se va face în funcție de scopul urmărit şi anume:

- pentru structuri rigide se adoptă profilul închis;

- pentru structuri elastice se adoptă profilul deschis, care admite deformaţii mari fără a se depăşi tensiunea tangenţială admisibilă.

8.9. Generalizarea relaţiilor de calcul la răsucire

Analizând forma identică a relaţiilor (8.8), (8.26,a), (8.32) şi (8.37) pentru calculul tensiunilor tangenţiale maxime la răsucirea barelor drepte, a relaţiilor (8.10), (8.28,a), (8.34) şi (8.39) pentru determinarea rotirilor specifice şi respectiv (8.11), (8.30), (8.35) şi (8.42) se pot scrie relaţii unice şi anume:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_t} \le \tau_a \ , \qquad \textbf{(8.43)}$$

$$\theta_{max} = \frac{M_{t\,max}}{G \cdot I_t} \le \theta_a , \qquad \textbf{(8.44)}$$

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_t} = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_t} \le \Delta\varphi_a . \qquad \textbf{(8.45)}$$

Dacă în aceste relaţii se înlocuiesc W_t şi I_t cu caracteristicile geometrice la răsucire corespunzătoare fiecărei forme de secţiune şi anume:

- la secţiunea circulară:

$$W_t \rightarrow W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} ,$$

$$I_t \rightarrow I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} .$$

- la secţiunea inelară cu factorul dimensional k = d/D:

$$W_t \rightarrow W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}\left(1 - k^4\right),$$

$$I_t \rightarrow I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}\left(1 - k^4\right).$$

- la secţiunea dreptunghiulară (h > b);

$$W_t \rightarrow W_t = k_1 \cdot h \cdot b^2 ,$$

$$I_t \rightarrow I_t = k_2 \cdot h \cdot b^3,$$

- la bare cu pereți subțiri, profil deschis (b>>t):

$$W_t \rightarrow W_{td} = \frac{I_t}{t_{max}},$$

$$I_t \rightarrow I_{td} = \frac{\alpha}{3}\sum b \cdot t^3,$$

unde: α = 1 pentru toate secțiunile cu excepția profilelor standardizate pentru care avem, α = 1,1..1,2 pentru profilul U, α = 1,3 pentru profilul I.

- la barele cu perete subțire profil închis:

$$W_t \rightarrow W_{i[} = 2 \cdot \Omega \cdot t_{min},$$

$$I_t \rightarrow I_{t[} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{s}{t}},$$

în care Ω este aria închisă de fibra medie iar s este lungimea fibrei medii.

8.10. Răsucirea barelor cu pereți subțiri cu secțiuni dublu conexe

Modul de rezolvare a unor astfel de probleme va fi exemplificat prin aplicația următoare.

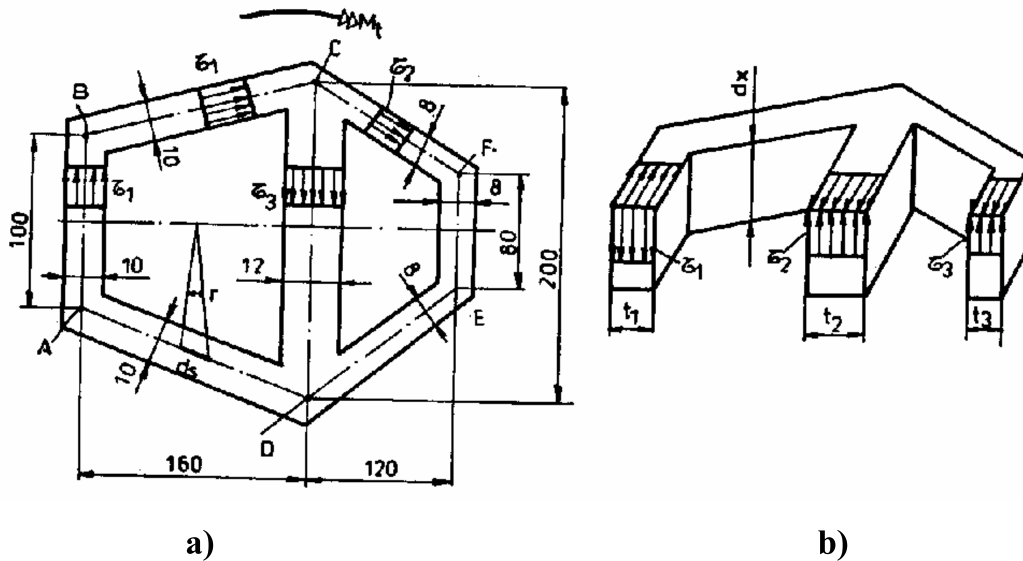
Aplicația 8.9. Pentru bara cu secțiunea din figura 8.15 să se determine momentul de torsiune capabil şi corespunzător acestuia rotirea specifică (G = 81 GPa, τ_a= 90 MPa).

Rezolvare: Izolăm un element longitudinal (fig.8.15,b), din ecuația de echilibru în lungul axei Ox:

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 + \tau_3 \cdot t_3., \qquad (a)$$

şi din ecuația de echivalență rezultă:

$$M_t = \int_S (\tau \cdot t) \cdot r \cdot ds = 2 \cdot (\tau_1 \cdot t_1 \cdot \Omega_1 + \tau_2 \cdot t_2 \cdot \Omega_2). \qquad (b)$$



a) b)

Fig. 8.15

Aspectul geometric se poate scrie ținând seama că secțiunea transversală este indeformabilă în planul ei:

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3. \tag{c}$$

Scriind condițiile de rigiditate pe cele două contururi obținem:

$$\begin{aligned} &(\text{ABCD}) \quad \tau_1 \cdot t_1 + \tau_3 \cdot t_3 = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot \Omega_1, \\ &(\text{CDEF}) \quad \tau_2 \cdot t_2 - \tau_3 \cdot t_3 = 2 \cdot G \cdot \theta \cdot \Omega_2. \end{aligned} \tag{d}$$

Rezolvând sistemul de ecuații (a și d) se obține:

$$\tau_2 = 1{,}111 \cdot \tau_1;$$
$$\tau_3 = 0{,}09263 \cdot \tau_1.$$

care înlocuite în relația b):

$$M_t = 2 \cdot \left(\tau_1 \cdot t_1 \cdot \Omega_1 + \tau_2 \cdot t_2 \cdot \Omega_2\right) = \tau_1 \cdot \left(2 \cdot t_1 \cdot \Omega_1 + 2{,}222 \cdot t_2 \cdot \Omega_2\right).$$

De pe desen se obține:

$$\Omega_1 = \frac{20+10}{2} \cdot 16 = 240 \text{ cm}^2,$$
$$\Omega_2 = \frac{80+20}{2} \cdot 12 = 168 \text{ cm}^2.$$

și cu aceste valori și pentru $\tau_1 = \tau_a$ momentul de torsiune va fi:

$$M_t = 90 \cdot \left(2 \cdot 10 \cdot 240 \cdot 10^2 + 2{,}222 \cdot 8 \cdot 168 \cdot 10^2\right) \cdot 10^{-6} = 70{,}08 \text{ kNm}.$$

Se adoptă: $M_t = 70$ kNm.

Rotirea specifică:

$$\theta = \frac{\tau_1 \cdot t_1 + \tau_3 \cdot t_3}{2 \cdot G \cdot \Omega_1} = \frac{\tau_1 \cdot (t_1 + 0{,}09263 \cdot t_2)}{2 \cdot G \cdot \Omega_1} = \frac{M_t \cdot (t_1 + 0{,}09263 \cdot t_2)}{2 \cdot G \cdot \Omega_1 \cdot (2 \cdot t_1 \cdot \Omega_1 + 2{,}222 \cdot t_2 \cdot \Omega_2)} =$$

$$= \frac{70 \cdot 10^6 \cdot (10 + 0{,}09263 \cdot 8)}{2 \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 240 \cdot 10^2 \cdot (2 \cdot 10 \cdot 240 \cdot 10^2 + 2{,}222 \cdot 0{,}8 \cdot 168 \cdot 10^2)} =$$

$$= 3{,}793 \cdot 10^{-7}\ \text{rad / mm} = 2{,}1 \cdot 10^{-2}\ {}^{\circ}/_{m}.$$

8.11. Bare de secțiune circulară solicitate elasto –plastic

Considerăm o bară de secțiune circulară cu diametrul d solicitată la răsucire de momentul M_t. Dacă solicitarea este elastică tensiunile tangențiale variază liniar, de la valoarea maximă pe contur până la zero pe axa barei (fig.8.16,a). Distribuția tensiunilor nu se modifică până la $M_t = M_{tLe} = \tau_c \cdot W_p$ (fig. 8.16,a) unde s-a notat cu M_{tLe} - momentul maxim până la care secțiunea este solicitată în întregime în domeniul elastic.

Când momentul de răsucire creşte peste valoarea M_{tLe} atunci numai o parte din secțiune se va deforma elastic (cea cuprinsă în distanța $r \le a$) iar coroana va avea deformări elasto-plastice.

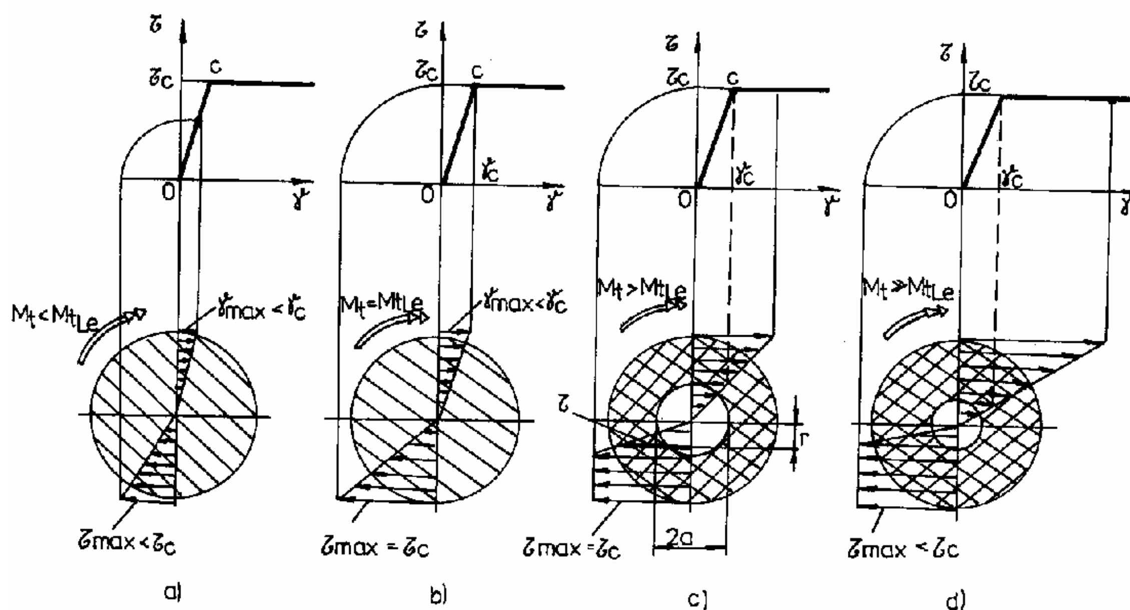


Fig. 8.16

Dacă bara este realizată din oţel de rezistenţă mică şi mijlocie ce are palier de curgere lung, atunci curba caracteristică ($\tau = f(\gamma)$), se poate schematiza printr-o diagramă de tip Prandtl pentru material ideal elasto-plastic (fig.8.17). Pentru aceste materiale curba caracteristică are o porţiune liniară ($\tau = G \cdot \gamma$, pentru $\gamma \leq \gamma_c$) şi un palier de curgere ($\tau = \tau_c$ pentru $\gamma > \gamma_c$). În acest caz, când $M_t > M_{tLe}$, tensiunile tangenţiale se distribuie în secţiune aşa cum sunt arătate în figura (8.16,c,d).

Pentru a stabili limita dintre zona solicitată elastic şi cea solicitată în domeniul plastic, fiecărei secţiuni i s-a ataşat o curbă caracteristică schematizată pentru materialul ideal elasto-plastic (conform ipotezei făcute). Punctul de pe fiecare caracteristică reprezintă starea de solicitare-deformare. Lunecarea specifică γ_c, corespunzătoare începutului palierului de curgere va preciza mărimea "a" a razei maxime a zonei solicitate elastic.

Lunecarea specifică are o distribuţie liniară de la zero pe axa barei la γ_{max} pe conturul exterior. Tensiunea tangenţială nu poate depăşi limita de curgere τ_c, fiind constantă pe zonele solicitate plastic ($\tau = \tau_c$) şi variază liniar de la 0 la τ_c pe zonele solicitate în domeniul elastic (zero pe axa barei).

Ecuația echivalentă dintre momentul de răsucire şi tensiunile din secțiune, considerând dA = 2π · r · dr,

$$M_t = \int r \cdot (\tau \cdot dA) =$$

$$= \int_0^a r \cdot \frac{r}{a} \cdot \tau_c \cdot (2\pi \cdot r \cdot dr) + \int_a^{d/2} r \cdot \tau_c \cdot (2\pi \cdot r \cdot dr) = \frac{\pi \cdot d^3}{12} \cdot \left(1 - \frac{2a^3}{d^3}\right) \cdot \tau_c \qquad \textbf{(8.46)}$$

unde:

- $\tau = \tau_c$ pe zona solicitată în domeniul plastic $r \in \left[a, \frac{d}{2}\right]$

- $\tau = \frac{r}{a} \cdot \tau_c$ pentru zona solicitată în domeniul elastic $r \in [0, a]$.

Momentul de răsucire are două limite:

$$M_{te} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot \tau_c = W_p \cdot \tau_c \ , \qquad \textbf{(8.47)}$$

pentru a = d/2 (vezi relația 8.15) şi momentul de torsiune limită:

$$M_{tL} = \frac{\pi \cdot d^3}{12} \cdot \tau_c = \tau_c \cdot S_p . \qquad \textbf{(8.48)}$$

când întreaga secțiune este solicitată în domeniul plastic (fig. 8.16,a) şi unde s-a notat cu:

$$S_p = \frac{\pi \cdot d^3}{12}, \qquad \textbf{(8.49)}$$

caracteristica geometrică de rezistețã la răsucire în domeniul plastic a barelor de secțiune circulară.

Raportul dintre momentul de torsiune limită în domeniul elastic (M_{te}) şi momentul limită (M_{tL}) al barelor de secțiune circulară este:

$$\frac{M_{tL}}{M_{te}} = \frac{\tau_c \cdot S_p}{\tau_c \cdot W_p} = \frac{\pi \cdot d^3}{12} \cdot \frac{16}{\pi \cdot d^3} = 1{,}333 .$$

Deci, bara de secțiune circulară are rezerve de rezistență de 33,3 % ce se pun în evidență prin calculul la rezistența la starea limită.

Aplicația 8.10. Să se dimensioneze o bară de secțiune circulară încastrată la ambele capete (fig. 8.18) solicitată de un moment M_t = 31,4 kNm, prin metoda stării limită, cunoscând τ_c=180 MPa şi coeficientul de siguranță impus c_o= 3.

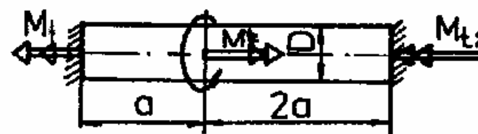


Fig. 8.18

Rezolvare: Dacă M_t aplicat, creşte atunci deformațiile plastice apar mai întâi în zona mai scurtă a barei. Bara mai poate suporta o creştere de moment de răsucire până când ambele regiuni devin solicitate plastic.

În această stare, din condiția de echilibru la starea limită va avea:

$$M_{t1} = M_{t2} = \frac{1}{2} M_{tl} = \tau_c \frac{\pi d3}{12} \;;$$

Dar:

$$M_t = \frac{M_{tL}}{c} = 2 \cdot \frac{\tau_c}{c} \cdot \frac{\pi d^3}{12},$$

din care rezultă:

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{6 M_{tc} \cdot c}{\pi \cdot \tau_c}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 31{,}4 \cdot 10^6 \cdot 3}{\pi \cdot 180}} = 99{,}98 \text{ mm}.$$

Se adoptă: d = 100 mm.

Aplicația 8.8. O bară de secțiune inelară (fig. 8.19) este solicitată la torsiune de un moment $M = 9\,\text{KNm}$. Limita de curgere a materialului $\tau_c = 180\text{MPa}$, d= 0,8 D şi se admite un coeficient de siguranță c= 2,5. Să se dimensioneze bara.

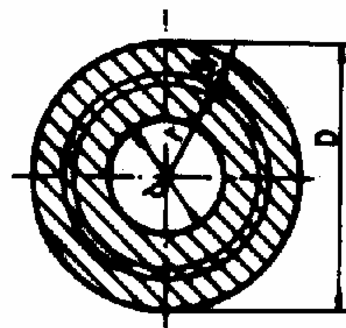


Fig. 8.19

Rezolvare. Din relația de echivalență rezultă:

$$M_{tl} = \int_{d/2}^{D/2} r \cdot (\tau \cdot dA) = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r \cdot \tau_c \cdot (2\pi \cdot r \cdot dA) = 2\pi \cdot \tau_c \cdot \left(\frac{D^3}{24} - \frac{d^3}{24} \right) =$$

$$= \tau_c \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{12} \cdot \left(1 - k^3\right),$$

unde k = d/D.

Ştiind că

$$M_{tcp} = \frac{M_{tl}}{c} = \frac{\tau_c}{c} \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{12} \cdot \left(1 - k^3\right) = \frac{\tau_c}{c} \cdot S_p,$$

în care s-a notat:

$$S_p = \frac{\pi \cdot D^3}{12} \cdot \left(1 - k^3\right), \tag{8.50}$$

caracteristica geometrică la răsucire în domeniul plastic al barelor de secțiune inelară, se obține:

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{12 M_t \cdot c}{\pi \cdot \tau_c \cdot \left(1 - k^3\right)}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 9 \cdot 10^6 \cdot 2{,}5}{\pi \cdot 180 \cdot \left(1 - 0{,}8^3\right)}} = 93{,}17 \text{ mm}.$$

Se adoptă: D=100 mm şi d= 80 mm.